ＩＢ　解析特論（$Fourier$ 変換）　講義報告[2]

２００８年2月2日（土）　１４：００－１６：００

前回に引き続き、急減少関数の全体の空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の構造を調べ、$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に属する元の $Fourier$ 変換がまた、$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に属することを示した。次に、$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上に $Fourier$ 逆変換が存在することを示すために、サポートが有限な無限回連続微分可能な関数に対して、$Fourier$ 逆変換が存在することを示した。

補題 1.3.

$$V_{mn} = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid \eta_{mn}(f) < \infty\} \quad \textit{for}\ \forall (m,n) \in \mathbb{N}_0^2$$

とおいたとき、

1. V_{mn} は $C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ の線形部分空間である。
2. $m_1 \leq m_2 \Rightarrow V_{m_2 n} \subset V_{m_1 n}$
3. $\displaystyle\bigcap_{(m,n)\in\mathbb{N}_0^2} V_{mn} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$

前回、任意の $(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ に対して、

$$\eta_{mn}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+x^2)^{\frac{m}{2}} |(D^n f)(x)| \quad \text{for } \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

とおいたとき、η_{mn} は $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上のノルムになることを示した。急減少関数の全体の空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ には、$\eta = \{\eta_{mn} \mid (m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0\}$ に関する始位相すなわち、全てのノルム η_{mn} を同時に連続にする最弱の位相が入る。

1.3　$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上の $Fourier$ 変換

任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ の $Fourier$ 変換を

$$\mathfrak{F}(f)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-\sqrt{-1}yx) dx$$

と記す。

補題 1.4. $\chi_n(x) = x^n$ $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$ と置いたとき、

1. $D^m(\mathfrak{F}(g)) = (-\sqrt{-1})^m \mathfrak{F}(\chi_m g)$
2. $\mathfrak{F}(D^m g) = (\sqrt{-1})^m \chi_m \mathfrak{F}(g)$

---

[2] 数学工房　http://www.sugakukobo.com/

定理 1.2. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ならば、$\mathfrak{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ である。従って、

$$\mathfrak{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni f \to \mathfrak{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

とおけば、$\mathfrak{F}$ は、$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ から $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ への $\mathbb{C}-$ 線形変換すなわち、$\mathfrak{F} \in \mathfrak{L}_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))$ である。

補題 1.5. $C_c^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ をサポート・コンパクトな無限回連続微分可能な複素数値関数の全体とするとき、任意の $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ に対して、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}(f)(y) \exp(\sqrt{-1}yx) dy$$

が成立する。

記録　J.S